

Oscilações e Corrente Alternada

Professor: Tiago Luiz

Resumo

Oscilações em circuitos LC – Análise Qualitativa

Nesse módulo, será abordado o assunto de Oscilações eletromagnéticas e corrente alternada. É importante lembrar o assunto tratado anteriormente, circuitos RL que envolve a resistência e indutores e circuitos RC que envolve resistência e capacitores. Nesses dois tipos de circuitos tratados é importante relembrar que a carga e corrente elétrica tinham um comportamento com variação em exponencial. Já no circuito LC a oscilação ocorre de maneira diferente. A carga e a corrente serão escritas em funções senoidais.

Primeiramente supondo que um indutor seja conectado em um capacitor através de fios ideais, sem nenhuma resistência no circuito, a energia tende a permanecer constante. Ao fixar um capacitor de placas paralelas carregado no circuito, teremos a formação de um campo elétrico entre as placas. Pensando no exemplo ilustrado abaixo em que existe um campo elétrico apontado para cima, teremos na parte de baixo cargas positivas e na parte de cima cargas negativas. Ao ligar o circuito, devido a existência de um indutor, é possível perceber um fluxo de cargas de estabelecendo no circuito. Os elétrons iram migrar da região negativa para a positiva, com isso gerando uma corrente elétrica no sentido horário. A tendência é com o tempo toda essa energia que começa inicialmente baixa e armazenada no capacitor, seja transferida para o indutor (aumentando o campo magnético). Após um certo tempo, o capacitor irá ficar completamente descarregado. Mesmo completamente descarregado, por causa do indutor a corrente não pode ir a zero. Por isso o fluxo de cargas continua e ocorre uma inversão de polaridade no capacitor, ficando positiva na parte de cima e negativa na parte de baixo, até que toda energia do indutor retorne ao capacitor. Com isso a energia irá transitar hora para o capacitor e hora para o indutor de forma cíclica. Se a energia é máxima no capacitor, será mínima no indutor e vice-versa.

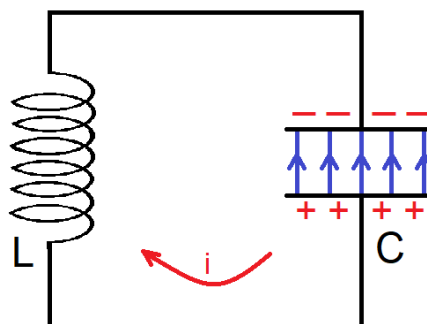


Figura 1: circuito LC

Sabe-se que a energia potencial armazenada no capacitor é dada por

$$Ep_c = \frac{q^2}{2C} \quad (1)$$

E a energia potencial armazenada no indutor é dada por

$$Ep_L = \frac{Li^2}{2} \quad (2)$$

Supondo que não tenha um elemento dissipando a energia no circuito, a soma das energias tende a permanecer constantes. Enquanto a carga aumenta, a corrente diminui, ou seja, a energia no capacitor aumenta e do indutor diminui e quando a energia do capacitor diminui, a energia do indutor que irá aumentar.

Oscilações em circuitos LC – Análise Quantitativa

Nesse tópico, será feita uma análise quantitativa do circuito LC. Como estamos trabalhando com um circuito que não há perda de energia, um circuito ideal. A energia do sistema é dada por

$$E = Ep_i + Ep_L = \frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2} \quad (3)$$

Derivando a energia descrita acima em função do tempo:

$$\frac{dE}{dt} = 0 = \frac{2q}{2C} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{2Li}{2} \cdot \frac{di}{dt} \quad (4)$$

Obs: A derivada é igual a zero, já que a energia é constante.

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad (5)$$

Lembrando que $i = \frac{dq}{dt}$

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} \cdot q = 0 \quad (6)$$

Dividindo toda a equação por L

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} \cdot q = 0 \quad (7)$$

Pensando em uma solução para essa equação diferencial

$$q = Q \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (8)$$

Obs: Sendo "q" a carga instantânea e "Q" a carga máxima.

Derivando a equação mostrada acima

$$i = \frac{dq}{dt} = -\omega \cdot Q \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (9)$$

Oscilações Amortecidas em circuito RLC

Nesse tópico iremos tratar das oscilações amortecidas em um circuito RLC. Nesse caso, não temos uma bateria conectada fornecendo energia ao circuito. Os elementos são conectados com uma energia inicial associada. Lembrando que o elemento resistivo não armazena energia, diferente do capacitor e do indutor.

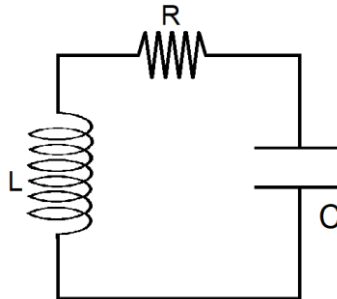


Figura 2: circuito RLC

Relembrando a equação que foi desenvolvida no tópico anterior:

$$E = Ep_i + Ep_L \frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2} \quad (10)$$

Diferente do caso anterior, nessa situação a energia do sistema não é constante. Com isso, a derivada será diferente de zero. Logo,

$$\frac{dE}{dt} = -R \cdot i^2 = \frac{q}{C} \cdot \frac{dq}{dt} + L \cdot i \cdot \frac{di}{dt} \quad (11)$$

Fazendo as devidas simplificações e sabendo que $i = \frac{dq}{dt}$, temos

$$L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} \cdot q = 0 \quad (12)$$

Resolvendo essa equação diferencial, chegamos no resultado:

$$q(t) = Q \cdot e^{\frac{-R \cdot t}{2L}} \cdot \cos(w't + \varphi_0) \quad (13)$$

w' é a frequência angular e é dado por

$$w' = \sqrt{w^2 + \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (14)$$

Corrente Alternada

Nesse tópico iremos tratar o conceito de corrente alternada. Esse sistema é responsável por alimentar a nossa corrente elétrica, devido a facilidade que temos em produzir esse tipo de corrente. Os geradores em geral produzem corrente alternada.

Lembrando que é possível produzir força eletromotriz induzida sempre que temos a variação do fluxo magnético. Com isso, temos

$$\varepsilon_{IND} = -\frac{d\phi}{dt} \quad (15)$$

Recordando que o fluxo magnético é dado por

$$\phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (16)$$

Sabemos que existem 3 maneiras de produzir a variação do fluxo magnético. Variando a intensidade do campo, a área da espira ou o ângulo entre o vetor campo e área.

Imaginando um campo magnético uniforme, uma bobina que tem uma área constante e sua extremidade seja presa por um anel que está conectado a um circuito como demonstrado na figura abaixo. Ao girar esse anel, a bobina gira no interior do campo magnético e uma vez que essa bobina gira, não vai existir variação do campo magnético ou da área, mas irá ocorrer uma variação no ângulo formado pelo vetor área e o vetor campo magnético

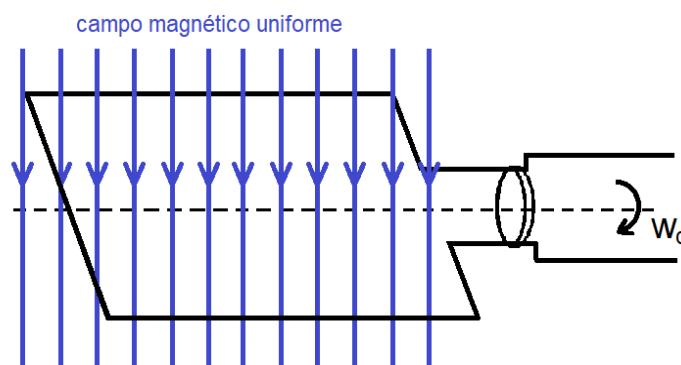


Figura 3: bobina com campo magnético uniforme

Retomando as equações 15 e 16 mostradas acima, temos

$$\varepsilon_{IND} = -\frac{d(B \cdot A \cdot \cos \theta)}{dt} \quad (17)$$

A posição angular do sistema pode ser escrita por

$$\theta = \theta_0 w_d t \quad (18)$$

w_d : frequência angular de excitação

Resolvendo a derivada 17, temos que

$$\varepsilon_{IND} = \varepsilon_M \sin(w_d t + \varphi_0) \quad (19)$$

Oscilações Forçadas

Nesse tópico iremos estudar as oscilações forçadas. Ela se diferencia das anteriores por ter uma fonte de tensão de corrente alternada. Faremos a análise para cada situação possível: com o resistor, capacitor e indutor, nessa ordem respectivamente.

Carga resistiva

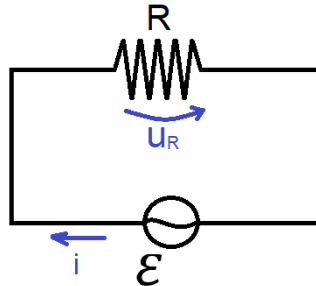


Figura 4: circuito com carga resistiva

Pelo método de kirchhoff, podemos escrever a seguinte relação

$$\varepsilon - u_R = 0 \rightarrow u_R = U_R \cdot \sin wt \quad (20)$$

Com base na 1ª lei de Ohm, temos

$$i_R \frac{u_R}{R} = \frac{U_R}{R} \sin wt \quad (21)$$

u_R e i_R estão em fase

$$U_R = I_R \cdot R \quad (22)$$

Sendo U_R e I_R os valores máximos da tensão e corrente, respectivamente

Carga Capacitiva

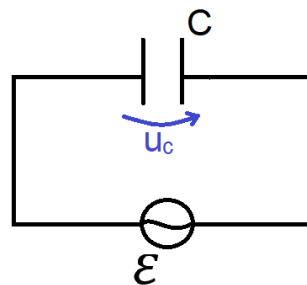


Figura 5: circuito com carga capacitiva

Pelo método de kirchhoff, podemos escrever a seguinte relação

$$\varepsilon - u_c = 0 \rightarrow u_c = U_c \sin wt \quad (23)$$

Relacionando a ddp com a carga armazenada, temos

$$q = C \cdot u_c = C \cdot U_c \sin wt \quad (24)$$

Derivando a expressão da carga, chegamos a

$$i_c \frac{dq}{dt} = w \cdot C \cdot U_c \cos wt \quad (25)$$

Sabendo que a reatância capacitiva é dada por

$$X_c = \frac{1}{w \cdot C} \quad (26)$$

E relacionando a expressão derivada com a relação da reatância capacitiva, concluímos que

$$i_c = \frac{U_c}{X_c} \cdot \sin(wt + 90) \quad (27)$$

A corrente que se estabelece no circuito capacitivo não está em fase com a fonte de tensão.

Carga indutiva

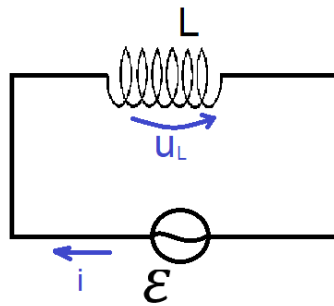


Figura 6: circuito com carga indutiva

Pelo método de Kirchhoff, podemos escrever a seguinte relação

$$\varepsilon - u_i = 0 \rightarrow u_i = U_i \cdot \sin wt \quad (28)$$

Sendo $u_i = L \cdot \frac{di}{dt}$, temos

$$L \cdot \frac{di}{dt} = U_i \cdot \sin wt \quad (29)$$

Integrando a expressão, chegamos a

$$i_L \int \frac{U_L}{L} \sin wt \quad (30)$$

$$i_L - \frac{U_L}{w \cdot L} \cos wt \quad (31)$$

Sabendo que a reatância indutiva é dada por

$$X_L = w \cdot L \quad (32)$$

E relacionando a expressão integrada com a relação da reatância capacitiva, concluímos que

$$i_L \frac{U_L}{X_L} \sin(wt - 90) \quad (33)$$

Transformadores

Nesse último tópico iremos falar sobre os transformadores. Os transformadores são dispositivos capazes de aumentar ou reduzir valores de tensão.

O seu funcionamento é baseado na criação de uma corrente induzida no secundário (bobina em que sai a tensão transformada), a partir da variação de fluxo gerada pelo primário (bobina que recebe a tensão da rede), como ilustrado na figura abaixo

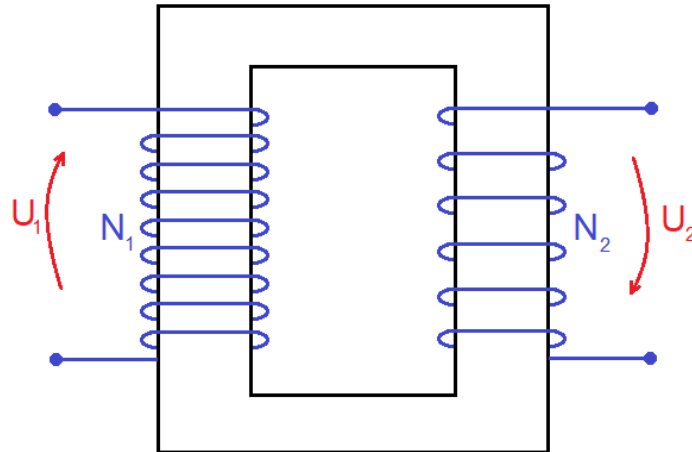


Figura 7: Transformador

Sabemos que uma potência é dada por

$$P = i \cdot U \quad (34)$$

Pela lei de Faraday, temos

$$U_1 = -N_1 \frac{d\phi}{dt} \quad (35)$$

$$U_2 = -N_2 \frac{d\phi}{dt} \quad (36)$$

Dividindo as duas equações chegamos na seguinte relação

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (37)$$

Pensando numa situação ideal, podemos dizer que

$$P_1 = P_2 \rightarrow i_1 \cdot U_1 = i_2 \cdot U_2 \quad (38)$$

Logo,

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{i_2}{i_1} \quad (39)$$